

APRIL/MAY 2024

23UMA22 — INTEGRAL CALCULUS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.



1. Evaluate $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$.

மதிப்பிடுக : $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx$.

2. Write the reduction formula for $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$ -க்கான குறைப்பு சூத்திரத்தை எழுதவும்.

3. Evaluate $\int_0^1 \int_0^2 xy^2 dy dx$.

மதிப்பிடுக : $\int_0^1 \int_0^2 xy^2 dy dx$.

4. Find the limits of integration in the double integral $\iint_R f(x,y) dx dy$ R is in the first quadrant and bounded by $x=1, y=0, y^2=4x$.

$\iint_R f(x,y) dx dy$ என்ற இரட்டை ஒருங்கிணைப்பில்

உள்ள ஒருங்கிணைப்பின் வரம்புகளைக் கண்டறியவும்.
R என்பது முதல் நாற்புறம் மற்றும் $x=1, y=0, y^2=4x$ என்ற எல்லைக்குட்பட்டது.

5. Evaluate $\int_0^a \int_0^b \int_0^c xyz dz dy dx$.

மதிப்பிடுக $\int_0^a \int_0^b \int_0^c xyz dz dy dx$.

6. Write the formula for $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$.

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ -க்கான சூத்திரத்தை எழுதுங்கள்.

7. Prove that $\Gamma(1)=1$.

$\Gamma(1)=1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

8. Define beta equation.

பீட்டா சமன்பாட்டை வரையறுக்கவும்.

17. Change the order of integration in $dx dy$ and then

evaluate it. $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$.

$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy$ -இல் உள்ள ஒருங்கிணைப்பு

வரிசையை $dx dy$ இல் மாற்றவும். எனவே அதை மதிப்பீடு செய்யவும்.

18. Find the volume of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ without transformation.

உருமாற்றம் இல்லாமல் $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ என்ற கோளத்தின் கொள்ளளவைக் காண்க.

19. Prove that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

20. Find the area of the astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ என்ற விண்கோளின் பரப்பைக் காண்க.

9. Write any two Geometric applications of integral calculus.

ஒருங்கிணைந்த நுண்கணித்தின் ஏதேனும் இரண்டு வடிவியல் பயன்பாடுகளை எழுதவும்.

10. Write any two Physical applications of integral calculus.

ஒருங்கிணைந்த நுண்கணித்தின் ஏதேனும் இரண்டு இயற்பியல் பயன்பாடுகளை எழுதவும்.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Evaluate $\int x^3 \log 5x dx$.

மதிப்பிடுக $\int x^3 \log 5x dx$.

Or

- (b) Evaluate $\int x^3 \cos(x^2) dx$.

மதிப்பிடுக $\int x^3 \cos(x^2) dx$.

12. (a) Change the order of integration in

$\int_0^a \int_x^a (x^2 + y^2) dy dx$ and hence evaluate it.

$\int_0^a \int_x^a (x^2 + y^2) dy dx$ என்ற ஒருங்கிணைப்பு

வரிசையை மாற்றவும், எனவே அதை மதிப்பீடு செய்யவும்.

Or

3

3003

(b) Evaluate $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1-\cos\theta)} r \cdot dr \cdot d\theta$.

மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi} \int_0^{a(1-\cos\theta)} r \cdot dr \cdot d\theta$.

13. (a) Find the surface area of the section of the cylinder $x^2 + y^2 + a^2$ made by the plane $x + y + z = a$.

$x + y + z = a$ என்ற தளத்தால் செய்யப்பட்ட $x^2 + y^2 + a^2$ உருளையின் பகுதியின் மேற்பரப்பைக் கண்டறியவும்.

Or

(b) Evaluate $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} e^z dx dy dz$.

மதிப்பிடுக $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} e^z dx dy dz$.

14. (a) Prove that $\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$.
நிரூபிக்கவும்: $\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1)$.

Or

(b) Find the value of $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$.

$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

15. (a) Find the area below $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ and above $g(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x + 5$ over the interval $1 \leq x \leq 2$.

$f(x) = -x^2 + 4x + 3$ -க்கு கீழே மற்றும் $g(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x + 5$ க்கு மேலே $1 \leq x \leq 2$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள பரப்பைக் காண்க.

Or

- (b) Find the area between $f(x) = -x^2 + 4x$ and $g(x) = x^2 - 6x + 5$ over the interval $0 \leq x \leq 1$.

$f(x) = -x^2 + 4x$ மற்றும் $g(x) = x^2 - 6x + 5$ ற்க்கிடையே $0 \leq x \leq 1$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள பரப்பைக் காண்க.

SECTION C — ($3 \times 10 = 30$ marks)

Answer any THREE questions.

16. Evaluate $\int_0^{\pi} \sin^n x dx$.

மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi} \sin^n x dx$.